

Politechnika Świętokrzyska w Kielcach  
Wydział Budownictwa i Architektury  
Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych

doktorant: **mgr inż. Rafał Piotrowski**

promotor: **prof. zw. dr hab. inż. Zbigniew Kowal, dr h.c.**

promotor pomocniczy: **dr hab. inż. Andrzej Szychowski**

## **WPLYW SZTYWNOŚCI WĘZŁÓW NA ZWICHRZENIE BELEK**

### **STRESZCZENIE**

Powszechnie stosowane w budownictwie stalowym belki, nieusztynione poprzecznie, są wrażliwe na utratę płaskiej postaci zgięcia (czyli zwichrzenie). Uwzględnienie rzeczywistych warunków podparcia belek w węzłach podporowych, prowadzi do dokładniejszego obliczenia momentu krytycznego zwichrzenia i w konsekwencji do dokładniejszego wyznaczenia ich nośności obliczeniowej. Takie podejście pozwala na bardziej świadome kreowanie bezpieczeństwa elementu konstrukcyjnego, nie na podstawie „nieznanych zapasów nośności”, ale na podstawie obiektywnych kryteriów niezawodności.

W pracy przedstawiono wyniki badań teoretycznych zwichrzenia bisymetrycznych belek dwuteowych sprężyste zamocowanych przeciw spaceniu oraz przeciw obrotowi bocznemu w węzłach podporowych. W analizie uwzględniono cały zakres zmienności sztywności węzłów, od pełnej swobody spaczenia ( $\kappa_\omega=0$ ) do ich zupełnego utwierdzenia ( $\kappa_\omega=1$ ) oraz od pełnej swobody obrotu ( $\kappa_u=0$ ) do ich zupełnego utwierdzenia ( $\kappa_u=1$ ).

Do wyznaczenia momentu krytycznego zwichrzenia wykorzystano metodę energetyczną *Rayleigh'a-Ritz'a*, opisując zarówno funkcję kąta skręcenia  $\varphi(x)$  jak również funkcję ugięcia bocznego  $u(x)$  belki za pomocą jednoznacznie określonych i odpowiednio sprzężonych (za pomocą rozdzielonych wskaźników utwierdzenia  $\kappa_\omega$  i  $\kappa_u$ ) wielomianów potęgowych ( $W_{Pi}$  i  $W_{Ui}$ ). Pozwoliło to na jednoznaczne odwzorowanie postaci zwichrzenia skojarzonej z wartością własną momentu krytycznego.

Na tej podstawie opracowano w pakiecie *Mathematica*® autorskie programy do obliczeń numerycznych i symbolicznych. Wyprowadzono wzory aproksymacyjne na moment krytyczny zwichrzenia dla podstawowych i najczęściej występujących schematów obciążenia. Wyznaczone na tej podstawie momenty krytyczne zwichrzenia porównano

z wartościami uzyskanymi z programu *LTBeam* (MES). Otrzymano bardzo dobrą zgodność wyników.

Obciążenia krytyczne wyznaczono dla: 1) różnych wariantów doboru wskaźników utwierdzenia ( $\kappa_\omega$ ,  $\kappa_u$ ); 2) różnych (charakterystycznych) punktów przyłożenia obciążenia poprzecznego (półka górna, oś ciężkości przekroju, półka dolna); oraz 3) pełnego zakresu zmienności stosunku momentów skupionych na podporach ( $-1 \leq \psi \leq 1$ ).

Wykazano, że wraz ze wzrostem wskaźników utwierdzenia ( $\kappa_\omega$ ,  $\kappa_u$ ) rośnie wartość obciążenia krytycznego belek. Większy wpływ na moment krytyczny zwichrzenia ma utwierdzenie przekrojów podporowych belki przeciw spaceniu. W przypadku obciążeń przyłożonych do półek górnych zbadanych w pracy belek, pełne ograniczenie spaczenia ( $\kappa_\omega=1$ ;  $\kappa_u=0$ ) dało wzrost obciążenia krytycznego od +46% do +115%, natomiast pełne ograniczenie obrotu bocznego ( $\kappa_u=1$ ;  $\kappa_\omega=0$ ) zwiększyło moment krytyczny od +23% do +47% w porównaniu z warunkami podparcia „widelkowego” (tzn.  $\kappa_\omega=\kappa_u=0$ ). Dla pełnego utwierdzenia zarówno przeciw spaceniu jak i przeciw obrotowi bocznemu (tzn.  $\kappa_\omega=\kappa_u=1$ ) odnotowano wzrost obciążenia krytycznego od +90% do nawet +209% w stosunku do  $\kappa_\omega=\kappa_u=0$ .

Ponadto w pracy zaproponowano jakościową klasyfikację węzłów rusztów belkowych związaną z nośnością krytyczną belek oraz zapewnieniem ciągłości w przekazywaniu sił przekrojowych (w tym bimomentów) i przemieszczeń (w tym deplanacji), tj. klasyfikację ze względu na dotrzymanie geometrycznej topologii konstrukcji. Wykazano, że zastosowanie bimomentowych połączeń rurowych w spawanych węzłach rusztów belkowych, w których dotrzymano ściśle geometryczną topologię zwiększa nośność krytyczną belek sprzęgających.

Wykorzystując autorskie programy oraz wzory aproksymacyjne przeprowadzono wieloparametrową analizę wpływu sztywności węzłów na moment krytyczny. W badaniach uwzględniono belki usztywnione żebrami w węzłach podporowych oraz belki będące elementami rusztów stalowych. Wyznaczone na podstawie programów i wzorów aproksymacyjnych momenty krytyczne zwichrzenia porównano z wartościami uzyskanymi metodą elementów skończonych (*LTBeam*, *LTBamN* oraz *Abaqus*).

Na podstawie przeprowadzonych badań sformułowano wnioski oraz zalecenia praktyczne dotyczące poprawnego, geometrycznie topologicznego rozwiązania konstrukcji rusztów belkowych.

Rafał Piotrowski

Politechnika Świętokrzyska w Kielcach  
Wydział Budownictwa i Architektury  
Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych

doktorant: **mgr inż. Rafał Piotrowski**

promotor: **prof. zw. dr hab. inż. Zbigniew Kowal, dr h.c.**

promotor pomocniczy: **dr hab. inż. Andrzej Szychowski**

## **EFFECT OF NODAL STIFFNESS ON LATERAL TORSIONAL BUCKLING OF BEAMS**

### SUMMARY

Steel beams, widely used in steel construction, are prone to the loss of flat bending mode, i.e. lateral torsional buckling. Taking into account real conditions of beam support at nodes leads to more accurate calculations of the critical moment for lateral torsional buckling. Consequently, it is possible to more accurately determine beam design resistance. Such an approach allows addressing the issue of the element structural reliability in a more knowledgeable manner. Reliability does not need to be based on “unknown reserves of resistance”, instead, it can be determined using objective criteria.

The study presents the results of theoretical investigations into lateral torsional buckling of bi-symmetric I-beams, elastically restrained against warping and against lateral rotation at support nodes. The analysis accounted for the whole range of node stiffness variation from the full warping freedom ( $\kappa_w=0$ ) to the complete warping restraint ( $\kappa_w=1$ ), and also from the full rotation freedom ( $\kappa_u=0$ ) to the complete rotation restraint ( $\kappa_u=1$ ).

To determine the critical moment for lateral torsional buckling, the *Rayleigh-Ritz* energy method was applied. Both the twist angle function  $\varphi(x)$  and the beam lateral deflection function  $u(x)$  were described using unequivocally specified and appropriately coupled (by means of separate fixity factors  $\kappa_w$  and  $\kappa_u$ ) power polynomials, namely  $W_{P_i}$  and  $W_{U_i}$ . That allowed unambiguous representation of the LTB mode associated with the eigenvalue of the critical moment.

On the basis of the above, an original program was developed for numerical and symbolic computations using *Mathematica*® software package. Approximation formulas were derived for the critical moment for lateral torsional buckling. The formulas accounted for the basic and most frequently found loading configurations. The values of critical

moments for lateral torsional buckling determined in this way were compared with those obtained from *LTBeam* (FEM) program. A very good congruence of the results was obtained.

The critical load was determined for the following: 1) different selected variants of the fixity factors ( $\kappa_\omega$ ,  $\kappa_u$ ); 2) different (characteristic) points at which transverse load was applied (top flange, the axis of gravity of the cross section, bottom flange); and also 3) full variation range of the ratio of the moments concentrated on supports ( $-1 \leq \psi \leq 1$ ).

It was shown that with an increase in fixity factors ( $\kappa_\omega$ ,  $\kappa_u$ ), the value of the beam critical load grows. The critical moment for lateral torsional buckling is to a greater extent affected by the restraint of beam support sections against warping. As regards loads applied to the top flanges of the beams examined in the study, the full restraint of warping ( $\kappa_\omega=1$ ;  $\kappa_u=0$ ) resulted in an increase in the critical load from +46% to +115%. In turn, the full restraint of lateral rotation ( $\kappa_u=1$ ;  $\kappa_\omega=0$ ) produced an increase in the critical moment from +23% to +47% compared with the fork support conditions (i.e.  $\kappa_\omega=\kappa_u=0$ ). For the full restraint against both warping and lateral rotation (i.e.  $\kappa_\omega=\kappa_u=1$ ), it was observed that the critical load value increased as much as from +90% to +209% when compared with  $\kappa_\omega=\kappa_u=0$ .

Additionally, a qualitative classification of the nodes of beam grids was proposed in the study. The classification is related to beam critical resistance, and to ensuring continuous transfer of section forces, including bimoments, and displacements, including deplanation. Thus, the classification concerns maintaining the geometric topology of the structure. It was demonstrated that the use of bimoment tube connections in welded nodes of beam grids, in which geometric topology was strictly maintained, gave an increase in the critical resistance of coupling beams.

Relying on the computational programs developed for the study and approximation formulas, a multi-parameter analysis of the impact of nodal stiffness on the critical moment was performed. The investigations included beams with end stiffeners at the support nodes and beams that are components of steel grids. The critical moments for lateral torsional buckling determined on the basis of computational programs and approximation formulas were compared with the values obtained using FEM analysis (*LTBeam*, *LTBamN* and *Abaqus*).

Based on investigations, conclusions were drawn and practical recommendations were suggested. The recommendations concern correct geometric topological solutions for beam grid structures.

Rafał Piotrowski